# Elementare Beispielsaufgaben zu Integralen

**EBA 1** Geben Sie je den Wert an:

a) $\int\limits_{-2}^{0} 4\,\mathrm{d}x$

b) $\int\limits_{5}^{-1} 1 - x\,\mathrm{d}x$

c) $\int\limits_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x$

d) $\int\limits_{-2}^{2} |x+1|\,\mathrm{d}x$

e) $\int\limits_{-3}^{1} x\,\mathrm{d}x$

f) $\int\limits_{-3}^{1} x\,\mathrm{d}t$

**EBA 2** Nennen Sie drei grundlegend verschiedene Fälle, wann der Wert eines Integrals 0 ist, und geben Sie je ein solches Integral an.

**EBA 3** Benennen Sie $a \mapsto \int\limits_{b}^{a} c(d)\,\mathrm{d}d$ und die Bestandteile davon mit den zutreffendsten Fachbegriffen.

**EBA 4** $v(t)$ beschreibt die Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ eines Fahrzeugs $t$ Sekunden nach dem Start. Geben Sie einen Term an, mit dem der in der dritten Minute nach dem Start insgesamt zurückgelegte Weg berechnet werden kann.

**EBA 5** Nennen und begründen Sie den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*.

**EBA 6** Bestimmen Sie jeweils die Funktion $f$:

a) $\int\limits_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = x^3$

b) $\int\limits_{-3}^{x} f(a)\,\mathrm{d}a = \sin x$

c) $\int\limits_{1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \ln x$ (für $x > 0$)

d) $\int\limits_{t}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 8t^4 - t + 1$

# Elementare Beispielsaufgaben zu Integralen

e) $\int\limits_0^x 2f(t)\,\mathrm{d}t = 14x^2 + 1$

f) $\int\limits_\pi^x f(t) + 1\,\mathrm{d}t = e^x$

**EBA 7** Berechnen Sie:

a) $\int 27x^6\,\mathrm{d}x$ c) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \sin(t) + e^t\,\mathrm{d}t$ d) $\int x^2(x^2-5)\,\mathrm{d}x$

e) $\int \frac{x^2\cos x - 2x\sin x}{x^4}\,\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{x}{t}\,\mathrm{d}t$

**EBA 8** Berechnen Sie:

a) $\int\limits_\pi^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$ c) $\int\limits_1^{-2} z\cdot 2^x\,\mathrm{d}x$

b) $\int\limits_{-1}^x 3t^2 - t\,\mathrm{d}t$ d) $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

**EBA 9** $f(x) = 2^{3x}$ beschreibt die Anzahl an Bakterien in einer Nährlösung $x$ Stunden nach Beginn des Experiments. Bestimmen Sie, wie viele Bakterien die Nährlösung innerhalb der ersten 24 Stunden durchschnittlich enthält.

**EBA 10** Bestimmen Sie je den Flächeninhalt, den (a) die Sinusfunktion mit der $x$-Achse und (b) die Funktionen $f\colon x \mapsto x^3 : 9$ mit der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten je im Intervall $[0;4]$ einschließt.

**EBA 11** Ein 3D-Drucker soll eine 2 mm dicke Normalparabelschablone für $x$-Werte von $-4$ bis 4 herstellen. Das Parabelinnere ist vollständig auszufüllen, sodass die entstehende Seite als Lineal genutzt werden kann. Bestimmen Sie die reinen Materialkosten bei einem Druckmaterialpreis von 1,5 ct pro 1 cm$^3$.

**EBA 12** Berechnen Sie (a) $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, (b) $\int\limits_{-\infty}^0 5^t\,\mathrm{d}t$ und (c) $\int\limits_2^4 \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

# Elementare Beispielsaufgaben zur zweiten Ableitung

**EBA 13** Berechnen Sie (a) $f''(x)$ zu $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, (b) $g^{(0)}(x)$ zu $g(x) = \frac{\sin x}{x^2+1}$, (c) $h^{(4)}(t)$ zu $h(t) = \ln t$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ (d) $f^{(n)}(x)$ zu $f(x) = e^{2x}$ und (e) $f^{(4n)}(x)$ zu $f(x) = \cos x$.

**EBA 14** Skizzieren Sie je einen passenden Graphen:

a) Überall rechtsgekrümmt, monoton steigend bis 3, dann fallend.
b) Überall linksgekrümmt, monoton steigend bis 3, dann fallend.
c) Linksgekrümmt bis zum Terrassenpunkt bei 5, Nullstelle bei 3.

**EBA 15** $f$ ist eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Beantworten Sie:

a) Was bedeutet es für $f'(x)$, wenn 1 eine Wendestelle von $G_f$ ist?
b) $x_\mathrm{T}$ ist eine Terrassenstelle von $G_f$. Was bedeutet das für $f''(x)$?
c) $G_{f'}$ ist überall linksgekrümmt. Was bedeutet das für $f''(x)$?
d) Bei $x = 2$ befindet sich ein lokales Maximum von $G_{f'}$. Was bedeutet das für $G_f$?

**EBA 16** Bestimmen Sie je das Krümmungsverhalten und alle Wendepunkte:

a) $a(x) = x^3 - 6x^2 + 9$
b) $b(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x$
c) $c(x) = 6x^2 - x^4 + 7x$
d) $d(x) = \left(x^2 + 1\right)^{-1}$

**EBA 17** Weisen Sie nach, dass es sich bei $\sqrt{2}$ um eine Extremalstelle von $f\colon x \mapsto 0{,}6x^5 - 20x^3 + 108x + 7$ handelt, und bestimmen Sie ihre Art.

# Elementare Beispielsaufgaben zu Zufallsgrößen

**EBA 18** $X$ sei eine Zufallsgröße zum einfachen Würfelwurf mit $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Geben Sie für jede Beschreibung von $X$ alle Wertepaare sowie die Definitions- und Wertemenge an:

a) Anzahl der gewürfelten Sechser.

b) Was als Nächstes gewürfelt werden muss, damit die Augensumme Sieben beträgt.

c) Betrag der Abweichung zu Vier.

**EBA 19** $Y$ ist eine Zufallsgröße zu $\Omega = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$: $P(\{\mathrm{a}\}) = 0{,}2$, $P(\{\mathrm{b}\}) = 0{,}4$, $P(\{\mathrm{c}\}) = 0{,}3$, $P(\{\mathrm{d}\}) = 0{,}1$, $Y(\mathrm{a}) = 3$, $Y(\mathrm{b}) = 4$, $Y(\mathrm{c}) = 1$, $Y(\mathrm{d}) = 4$. Berechnen Sie (a) $P(Y = 4)$, (b) $P(Y = 2)$, (c) $P(Y \leq 3)$, (d) $P(Y \neq 3)$ und (e) $P(Y > 0{,}5)$. Geben Sie dabei auch immer das Ereignis in Mengenschreibweise an.

**EBA 20** Veranschaulichen Sie graphisch (a) die Wahrscheinlichkeitsverteilung und (b) die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße $Y$ aus der vorherigen EBA. Verwenden Sie dazu die übliche Darstellungsform.

**EBA 21** Berechnen Sie (a) den Erwartungswert, (b) die Varianz und (c) die Standardabweichung der Zufallsgröße $Y$ aus EBA 19.

**EBA 22** Die Zufallsgröße $X$ hat die Wertemenge $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ und den Erwartungswert 1. Beschreiben Sie je, welche Änderung an der Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X$ Folgendes bewirkt:

a) Kleinerer Erwartungswert.

b) Gleicher Erwartungswert, höhere Varianz.

c) Größere Standardabweichung, kleinere Varianz.

# Elementare Beispielsaufgaben zu Urnenexperimenten

**EBA 23** Beschreiben Sie je ein geeignetes Urnenmodell:

a) Einmaliges Münzwerfen.
b) Einmaliges Werfen einer gezinkten Münze, bei der zu 60 % Kopf geworfen wird.
c) Dreimaliges Würfelwerfen.
d) Reihenfolge, in der fünf Personen nacheinander ankommen.
e) Auswahl von zwei Personen für eine Partnerabfrage in einer Klasse mit 22 Schülerinnen und Schülern.

**EBA 24** Berechnen Sie (a) 4!, (b) 1!, (c) 0!, (d) 705! : 704!, (e) 1000! : 997! und (f) $(n+1)! : (n-1)!$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

**EBA 25** Herr Roith muss 27 Klassen gleichzeitig beaufsichtigen. Er schafft es aber nur, 25 mal zufällig bei einer Klasse vorbei zu schauen.Berechnen Sie nachvollziehbar, wie viele Möglichkeiten es gibt, wann er welche Klasse aufsucht, (a) wenn er jede Klasse höchstens einmal aufsucht und zwar in Reihenfolge der Klassenzimmer, (b) wenn er jede Klasse höchstens einmal aufsucht und (c) ohne weitere Einschränkungen.

**EBA 26** Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$ gilt.

**EBA 27** Nennen Sie den Wert von (a) $\binom{20}{10}$, (b) $\binom{25}{20}$, (c) $\binom{28}{14}$, (d) $\binom{51}{3}$ und (e) $\binom{99}{0}$. Verwenden Sie ein geeignetes Hilfsmittel.

**EBA 28** Die 20 Kugeln in einer Urne sind mit 1 beginnend durchnummeriert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von zehn gezogenen Kugeln genau die Hälfte eine einstellige Nummer hat, wenn mit Beachtung der Reihenfolge und (a) ohne bzw. (b) mit Zurücklegen und (c) ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolgebeachtung gezogen wird.

# Elementare Beispielsaufgaben zu Bernoulli-Experimente

**EBA 29** Geben Sie je an, als welche(s) Bernoulli-Experiment/-Kette Folgendes sinnvollerweise aufgefasst werden kann:

a) Fairer Münzwurf.

b) Zufälliges Beantworten von drei Fragen mit je vier Antwortmöglichkeiten, von denen bekannterweise nur eine richtig ist.

c) Dreimaliges Würfeln bei „Mensch ärgere dich nicht“, wenn man keine Spielfigur auf dem Feld hat und dafür eine Sechs würfeln muss.

d) Ziehen von zwei Kugeln aus einer Urne mit sechs unterscheidbaren ohne Zurücklegen.

**EBA 30** Nennen Sie einen auf fünf Nachkommastellen gerundeten Wert für (a) $B(25; 0{,}04; 1)$, (b) $B(10; 0{,}7; 3)$, (c) $B(40; \frac{1}{2}; 11)$, (d) $B(100; 0{,}02; 24)$ und (e) vereinfachen Sie den Term $B(n; 0{,}1; n-1)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

**EBA 31** Bestimmen Sie (a) den Erwartungswert und (b) die Standardabweichung einer $B_{11;\,0{,}7}$-verteilten Zufallsgröße. $X$.

**EBA 32** Bestimmen Sie je einen Näherungswert: (a) $F_{0{,}3}^{10}(4)$, (b) $F_{0{,}1}^{9}(0)$, (c) $F_{0{,}27}^{97}(100)$, (d) $\sum\limits_{k=0}^{4} B(5; \frac{3}{4}; k)$, (e) $\sum\limits_{k=1}^{6} B(8; \frac{1}{2}; k)$, (f) $P(B_{15;\,0{,}2} > 3)$.

**EBA 33** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zweihunderterpackung Schrauben mehr als drei fehlerhafte enthält, wenn durchschnittlich jede hundertste fehlerhaft ist.

# Elementare Beispielsaufgaben zu Geraden und Ebenen

**EBA 34** Bestimmen Sie je eine Geradengleichung in Parameterform, die durch (a) $A(-3|1|2)$ und $B(0|0|7)$ bzw. (b) $X(k|1|-k)$ und $Y(k|-k|k)$ für $k \in \mathbb{R}$ beliebig verläuft.

**EBA 35** Prüfen Sie nachvollziehbar, ob bzw. für welche $a \in \mathbb{R}$ die Punkte auf $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegen: (a) $(7|2|2)$, (b) $(-13|-5|-2)$ und (c) $(a|1|a)$.

**EBA 36** Ermitteln Sie nachvollziehbar, ob die jeweilige Gleichung die identische Gerade darstellt wie $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$:

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 21 \end{pmatrix}$

**EBA 37** Geben Sie an, ob (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. (d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, und weisen sie die Richtigkeit Ihrer Antwort nach.

**EBA 38** Bestimmen Sie die Gleichung in Parameterform der durch $A(1|2|-3)$, $B(-1|2|3)$ und $C(1|-2|3)$ festgelegten Ebene. Weisen Sie nach, dass es sich wirklich um eine Ebene handelt.

**EBA 39** (a) Prüfen Sie, ob $P(2|-1|3)$ auf $E\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$ liegt und (b) bestimmen Sie zwei Punkte auf $E$.

**EBA 40** Bestimmen Sie die Ebenengleichung durch die Punkte $A(2|2|2)$, $B(2|0|0)$ und $C(0|0|2)$ in (a) Normalenform und (b) Hessescher Normalenform.

# Elementare Beispielsaufgaben zu Lagebeziehungen

**EBA 41** Bestimmen Sie je die Lagebeziehung zu $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$:

a) $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5+n \\ n-2 \\ n+1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ für festes $n \in \mathbb{R}$

**EBA 42** Bestimmen Sie je die Lagebeziehung und alle gemeinsamen Punkte von $E\colon 0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$ und

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

# Elementare Beispielsaufgaben zu Lagebeziehungen

**EBA 43** Bestimmen Sie je die Lagebeziehung und alle gemeinsamen Punkte von $E\colon 0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$ und

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \vec{x}\right] = 0$

b) $\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 0$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = 0$

**EBA 44** Bestimmen Sie den Abstand von $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu $P(1|2|-3)$.

**EBA 45** Bestimmen Sie von $E\colon 0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$ und (a) $A(-1|0|4)$ bzw. (b) $F\colon \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = 0$ den Abstand.

**EBA 46** Bestimmen Sie den Schnittwinkel von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und (a) $a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. (b) $b\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

**EBA 47** Bestimmen Sie den Schnittwinkel von $E\colon \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}\right] = 0$ und (a) $A: \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right]$ bzw. (b) $B\colon \vec{x} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$.

**EBA 47** Bestimmen Sie den Schnittwinkel von $E: \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}\right] = 0$ und $g\colon \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \sqrt{3}\lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.