EBA-LÖSUNGSSKIZZEN

EBA 1

a) $\int_{-2}^{0} 4\,dx = 2\cdot 4 = 8$

d) $\int_{-2}^{2} |x+1|\,dx = \int_{-2}^{-1} |x+1|\,dx + \int_{-1}^{2} |x+1|\,dx = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = 5$

b) $\int_{5}^{-1} 1-x\,dx = -\int_{-1}^{5} 1-x\,dx = -6\cdot\frac{1-(-1)+1-5}{2} = 6$

c) $\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$ ($x \mapsto x^3$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung!)

e) $\int_{-3}^{1} x\,dx = 4\cdot\frac{-3+1}{2} = -4$

f) $\int_{-3}^{1} x\,dt = 4x$ (da x hier eine Konstante ist)

EBA 2

- Integrationsgrenzen gleich: $\int_{4}^{4} \sin x\,dx = 0$
- Integrandenfunktion dort überall gleich 0: $\int_{10}^{100} 0\,dx = 0$
- Im Integrationsintervall haben die Flächen über und unter der x-Achse gleiche Flächeninhalte: $\int_{-5}^{5} x\,dx = 0$
- ...

EBA 3

$a \mapsto \int_{b}^{a} c(d)\,dd$ ist Integralfunktion mit Funktionsargument/oberer Integrationsgrenze a, unterer Integrationsgrenze b, Integrand(enfunktion) c und Integrationsvariabe d.

EBA 4

$\int_{0}^{3\cdot 60} v(t)\,dt$

EBA 5

Eine Integralfunktion ist stets eine Stammfunktion der Integrandenfunktion. Grund: Die momentane Steigung (also Ableitung) der Integralfunktion muss der Wert der Integrandenfunktion sein.

EBA 6

a) $F(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = F'(x) = 3x^2$

b) $F(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f(x) = F'(x) = \cos x$

c) $F(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f(x) = F'(x) = \frac{1}{x}$

d) $F(x) = 8x^4 - x + 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = F'(x) = 32x^3 - 1$

e) $F(x) = 14x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 2f(x) = F'(x) = 28x \qquad \Rightarrow f(x) = \frac{F'(x)}{2} = 14x$

f) $F(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f(x) + 1 = F'(x) = e^x \qquad \Rightarrow f(x) = F(x) - 1 = e^x - 1$

EBA 7

a) $\int 27x^6\,dx = \frac{27}{7}x^7 + c$ (je: weil Ableitung Integrand ist)

b) $\int \sin(t) + e^t\,dt = -\cos(t) + e^t + c$

c) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{0,5}\,dx = \frac{1}{1,5}\,x^{1,5} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x}^3 + c$

d) $\int x^2(x^2-5)\,dx = \int x^4 - 5x^2\,dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + c$

e) $\int \frac{x^2\cdot\cos x - 2x\sin x}{x^4}\,dx = \frac{\sin x}{x^2} + c$ (Quotientenregel!)

f) $\int \frac{x}{t}\,dt = x\cdot\int\frac{1}{t}\,dt = x\cdot e^t + c$

EBA 8

a) $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -\cos(2\pi) - [-\cos\pi] = -1 + (-1) = -2$

b) $\int_{-1}^{x} 3t^2 - t\,dt = [t^3 - 0{,}5t^2]_{-1}^{x} = (x^3 - 0{,}5x^2) - ((-1)^3 - 0{,}5\cdot(-1)^2) =$

$= x^3 - 0{,}5x^2 + 1{,}5$

c) $\int_{1}^{-2} z\cdot 2^x\,dx = z\cdot\int_{1}^{-2} e^{x\cdot\ln 2}\,dx = z\cdot\left[\frac{1}{\ln 2}\,e^{x\cdot\ln 2}\right]_1^{-2} = \frac{z}{\ln 2}\left(2^{-2} - 2^1\right) = \frac{-7z}{4\ln 2}$

d) $\int_{1}^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx = [\sin(\ln x)]_1^e = \sin(\overbrace{\ln e}^{1}) - \sin(\overbrace{\ln 1}^{0}) = \sin 1 - 0 = \sin 1$

EBA 9

$\frac{1}{24}\cdot\int_0^{24} 2^{3x}\,dx = \frac{1}{24}\cdot\int_0^{24} 8^x\,dx = \frac{1}{24}\cdot\left[8^x : \ln 8\right]_0^{24} = \frac{1}{24\cdot\ln 8}\cdot(8^{24} - 8^0) =$

$= \frac{2^{72} - 1}{24\cdot\ln 8} \approx 9{,}5\cdot 10^{19}$

EBA 10

a) Sinusfunktion hat nur Nullstellen 0, π und 2π in $[0;4]$

$$\Rightarrow \int_0^4 |\sin x|\,dx = \left|\int_0^{\pi} \sin x\,dx\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\right| + \left|\int_{2\pi}^{4} \sin x\,dx\right| =$$

$$= 2\cdot\int_0^{\pi} \sin x\,dx \qquad + \int_{2\pi}^{4} \sin x\,dx =$$

$$= 2\cdot\left[-\cos x\right]_0^{\pi} \qquad + \left[-\cos x\right]_{2\pi}^{4} =$$

$$= 2\cdot\left[-\cos\pi + \cos 0\right] \qquad + \left[-\cos 4 + \cos 2\pi\right] =$$

$$= \quad 4 \qquad -\cos 4 \quad + 1 \quad = \underline{5-\cos 4}$$

b) Winkelhalbierende $g(x)=x$ schneidet $f(x)$ für $g(x)=f(x)$, also

$x = x^3 : 9 \Rightarrow x=0$ oder $x=\pm 3$

$$\Rightarrow \int_0^4 |f(x)-g(x)|\,dx = \left|\int_0^3 \frac{x^3}{9}-x\,dx\right| + \left|\int_3^4 \frac{x^3}{9}-x\,dx\right|$$

EBA 11

Parabelschablone wird also von $f(x)=x^2$ und $y=f(\pm 4)=16$ begrenzt $\Rightarrow$ Flächeninhalt $A=\int_{-4}^{4} 16-x^2\,dx = \left[16x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-4}^{4} = 85\frac{1}{3}$ $[cm^2]$

$\Rightarrow$ Volumen in cm^3: $V=A\cdot 0{,}2 = \frac{256}{15}$

$\Rightarrow$ Materialkosten in Euro: $0{,}015\cdot V = \frac{32}{125} \approx 0{,}26$

EBA 12

a) $$\int_2^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_2^{t}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\ln x\right]_2^t = \lim_{t\to\infty}\left(\overset{\infty}{\uparrow}\!\!\ln t - \overset{\ln 2}{\uparrow}\!\!\ln 2\right) = \infty$$

b) $$\int_{-\infty}^{0} 5^t\,dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 e^{t\cdot\ln 5}\,dt = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{5^t}{\ln 5}\right]_x^0 = \lim_{x\to-\infty}\left(\overset{1}{\uparrow}\!5^0 - \overset{0}{\uparrow}\!5^x\right):\overset{\ln 5}{\uparrow}\!\ln 5 = \frac{1}{\ln 5}$$

c) $$\int_2^4 \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = \lim_{t\underset{<}{\to}4}\int_2^t (2-x):\sqrt{4x-x^2}\,dx = \lim_{t\underset{<}{\to}4}\left[\sqrt{4x-x^2}\right]_2^t =$$

$$= \lim_{t\underset{<}{\to}4}\left(\overset{\to 0}{\sqrt{4t-t^2}} - \overset{\to 2}{\sqrt{4\cdot 2-2^2}}\right) = -2$$

EBA 13

a) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1} \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = 2x\cdot(x^2+1)^{-2}$

$\Rightarrow f''(x) = x\,(x^2+1)^{-2} - 4x\cdot 2x\cdot(x^2+1)^{-3} = (-7x^2+x)(x^2+1)^{-3}$

b) $g^{(0)}(x) = g(x) = \frac{\sin x}{x^2+1}$

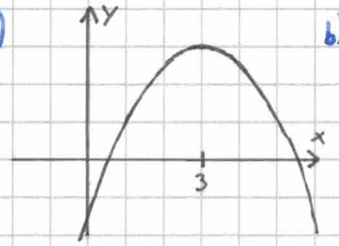
c) $h(t)=\ln t \Rightarrow h'(t)=\frac{1}{t} \Rightarrow h''(t)=-t^{-2} \Rightarrow h^{(3)}(t)=2t^{-3} \Rightarrow h^{(4)}(t)=-6t^{-4}$

d) $f(x)=e^{2x} \Rightarrow f'(x)=2e^{2x}=2\cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x)=2^n\cdot e^{2x}$

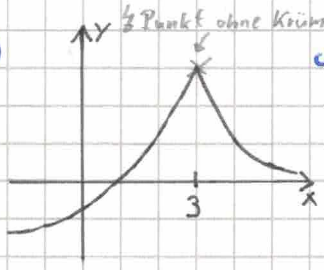
e) $f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x,\ f''(x)=-\cos x,\ f^{(3)}(x)=\sin x,\ f^{(4)}(x)=f(x) \Rightarrow f^{(4n)}(x)=\cos x$

EBA 14

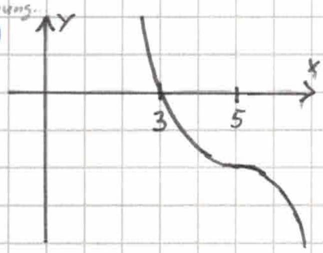
a)



b)



c)



EBA 15

a) 1 ist Wendestelle von G_f => dort Vorzeichenwechsel von f''
=> $G_{f'}$ hat Extremstelle 1

b) x_T ist Terrassenstelle von G_f => x_T ist Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel von f' => Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von f''

c) $G_{f'}$ überall linksgekrümmt => überall $f'''(x) > 0$ => $G_{f''}$ steigt überall streng monoton

d) Bei $x=2$ lokales Maximum von $G_{f'}$ => G_f hat bei $x=2$ lokal die höchste Steigung, also dort Wendestelle

EBA 16

a) $a(x) = x^3 - 6x^2 + 9$, $a'(x) = 3x^2 - 12x$, $a''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$

=> $a''(x) = 0$ nur für $x = 2$ => G_a hat Wendepunkt $(2|-7)$, da $a(2) = -7$

$a''(x) < 0$ für $x < 2$ => G_a ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; 2[$

$a''(x) > 0$ für $x > 2$ => G_a ist linksgekrümmt in $]2; \infty[$

b) $b(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x$, $b'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$, $b''(x) = 24x^2 - 24x + 6$

$b''(x) = 6(4x^2 - 4x + 1) = 6(2x-1)^2 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$; $b(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$

Überall linksgekrümmt, außer bei $x = 0{,}5$ (aber keine Wendestelle!)

c) $c(x) = 6x^2 - x^4 + 7x$, $c'(x) = 12x - 4x^3 + 7$, $c''(x) = 12 - 12x^2 = 12(1-x)(1+x)$

=> $G_{c''}$ ist nach unten geöffnete Parabel mit Nullstellen ± 1

$c(1) = 12$, $c(-1) = -2$ => Wendepunkte $(-1|-2)$ und $(1|12)$, dazwischen linksgekrümmt, sonst rechtsgekrümmt

d) $d(x) = (x^2+1)^{-1}$, $d'(x) = -(x^2+1)^{-2} \cdot 2x$, $d''(x) = -2(x^2+1)^{-2} + 4x(x^2+1)^{-3} \cdot 2x$

$\Rightarrow d''(x) = (x^2+1)^{-3}(-2x^2-2+8x^2) = 2(3x^2-1)(x^2+1)^{-3}$

$d''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2-1=0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ sind einfache Nullstellen

$d\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow$ Wendepunkte $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \middle| \frac{3}{4}\right)$

$d''(0) < 0$ und Nullstellen von d'' sind einfach, d hat keine Definitions-Lücke oder „Sprung" $\Rightarrow$ rechtsgekrümmt in $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$, linksgekrümmt in $\left]-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ und $\left]\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty\right[$

EBA 17

$f(x) = 0{,}6x^5 - 20x^3 + 108x + 7$, $f'(x) = 3x^4 - 60x^2 + 108$, $f''(x) = 12x^3 - 120x$

$f'(\sqrt{2}) = 3\cdot 4 - 60\cdot 2 + 108 = 0$, $f''(\sqrt{2}) = -96\sqrt{2} < 0$

$\Rightarrow G_f$ hat Hochpunkt bei $x = \sqrt{2}$

EBA 18

a) Wertepaare gegeben durch $X(1)=0, X(2)=0), X(3)=0, X(4)=0, X(5)=0, X(6)=1$
Definitionsmenge Ω, Wertemenge $\{0; 1\}$

b) $X(1)=6, X(2)=5, X(3)=4, X(4)=3, X(5)=2, X(6)=1$, Ω ist Definitions- und Wertemenge

c) $X(1)=3, X(2)=2, X(3)=1, X(4)=0, X(5)=1, X(6)=2$, Definitionsmenge Ω, Wertemenge $\{0; 1; 2; 3\}$

EBA 19

a) $P(Y=4) = P(\{b; d\}) = P(\{b\}) + P(\{d\}) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$

b) $P(Y=2) = P(\{\}) = 0$

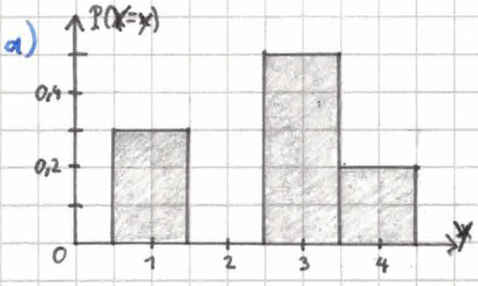
c) $P(Y \le 3) = P(\{a; c\}) = P(\{a\}) + P(\{c\}) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$

d) $P(Y \ne 3) = P(\{b; c; d\}) = 1 - P(\{a\}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

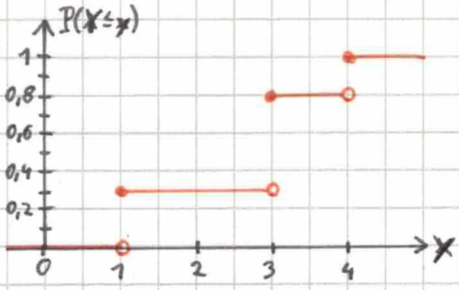
e) $P(Y > 0{,}5) = P(\{a; b; c; d\}) = 1$

EBA 20

a)



b)



EBA 21

a) $E(Y) = \sum_{i=1}^{4} y_i \cdot P(Y=y_i) = 1 \cdot P(Y=1) + 3 \cdot P(Y=3) + 4 \cdot P(Y=4) =$

$= 1 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}2 = \underline{2{,}6}$

b) $Var(Y) = |1-E(Y)|^2 \cdot P(Y=1) + |3-E(Y)|^2 \cdot P(Y=3) + |4-E(Y)| \cdot P(Y=4) =$

$= 1{,}6^2 \cdot 0{,}3 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}5 + 1{,}4^2 \cdot 0{,}2 = \underline{1{,}24}$

c) $\sigma(Y) = \sqrt{Var(Y)} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{31}}{5}}} \approx 1{,}11$

EBA 22

a) $P(X=0)$ muss größer werden (oder $P(X>1)$ kleiner)

b) z.B. Wahrscheinlichkeit für $X=1$ zu gleichen Teilen auf $X=0$ und $X=2$ umverteilen

c) Nicht möglich: Standardabweichung umso größer, je größer Varianz ist.

EBA 23

a) Einmaliges Ziehen aus Urne mit nur zwei unterscheidbaren Kugeln (K und Z)

b) Einmaliges Ziehen aus Urne mit 60 „K" und 40 „Z"-Kugeln

c) Dreimaliges Ziehen mit Zurücklegen aus Urne mit Kugeln „1", „2", „3", „4", „5", „6"

d) Fünfmaliges Ziehen aus Urne mit Kugel für jede Person, ohne Zurücklegen

e) Zweimaliges Ziehen ohne Zurücklegen aus Urne mit einer Kugel je Schüler(in)

EBA 24

a) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $1! = 1$

c) $0! = 1$

d) $705! : 704! = (705 \cdot 704!) : 704! = 705$

e) $1000! : 997! = 1000 \cdot 999 \cdot 998 = 997\,002\,000$

f) $(n+1)! : (n-1)! = (n+1) \cdot n = n^2 + n$

EBA 25

Je gedacht als Urnenexperiment: In Urne sind 27 unterscheidbare Kugeln (eine je Klasse), 25 werden gezogen und die entsprechenden Klassen besucht.

a) Ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolgebeachtung ziehen, da Reihenfolge durch Klassenzimmeranordnung vorgegeben ist $\Rightarrow \binom{27}{25} = \underline{351}$ Möglichkeiten

b) Ohne Zurücklegen, aber mit Reihenfolgebeachtung $\Rightarrow \frac{27!}{(27-25)!} = \underline{\frac{27!}{2}} \approx 5{,}44 \cdot 10^{27}$

c) Mit Zurücklegen und Reihenfolgebeachtung: $\underline{27^{25}} \approx 6{,}1 \cdot 10^{35}$ Möglichkeiten

EBA 26

$$\binom{n}{n-k} \overset{(1)}{=} \frac{n!}{[n-(n-k)]! \cdot (n-k)!} \overset{(2)}{=} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \overset{(3)}{=} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \overset{(1)}{=} \binom{n}{k}$$

wegen (1) Definition Binomialkoeffizient, (2) $n-(n-k)=k$, (3) Kommutativgesetz

EBA 27

a) $\binom{20}{10} = 184\,756$

b) $\binom{25}{20} = \binom{25}{5} = 53\,130$

c) $\binom{28}{14} = 40\,116\,600$

d) $\binom{51}{3} = 20\,825$

e) $\binom{99}{0} = 1$

EBA 28

Die Wahrscheinlichkeiten zu den Teilaufgaben (a) und (c) müssen identisch sein, (c) ist aber leichter zu berechnen: Es gibt $\binom{20}{10}$ gleich wahrscheinliche Möglichkeiten, 10 Kugeln zu ziehen, davon enthalten $\binom{9}{5}\binom{11}{5}$ genau 5 Kugeln mit einstelliger Nummer.

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit $\binom{9}{5} \cdot \binom{11}{5} : \binom{20}{10} = \underline{\frac{1323}{4199}} \approx 31{,}5\%$

Weil bei Teilaufgabe (b) bei jedem Ziehen mit $p = \frac{9}{20}$ eine einstellige Nummer gezogen wird, ist eine Lösung als Bernoulli-Kette am einfachsten. Wenn die Zufallsgröße X die Anzahl gezogener einstelliger Nummern beim $n=20$-fachen Ziehen ist, so gilt:

$$P(X=10) = B(20; \tfrac{9}{20}; 10) = 19 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 11^{11} \cdot 5^{-20} \cdot 3^{20} \cdot 2^{-38} \approx 15{,}93\%$$

EBA 29

Je Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p

a) Bernoulli-Experiment ($n=1$) mit $p=0{,}5$

b) $n=3$, $p=\frac{1}{4}$

c) $n=3$, $p=\frac{1}{6}$ nur falls immer dreimal gewürfelt wird, auch wenn z.B. zuerst eine Sechs geworfen wird!

d) Einzelnes Ziehen ist <u>kein</u> Bernoulli-Experiment, da nicht zurückgelegt wird. Aber möglich: $n=1$ und $p=t:\binom{6}{2}$, wenn t Anzahl gewählter Möglichkeiten ist.

EBA 30

a) $B(25;\,0{,}04;\,1)\approx 0{,}37541$ b) $B(10;0{,}7;3)\approx 0{,}00900$

c) $B(40;\frac{1}{2};11)\approx 0{,}00210$ d) $B(100;0{,}02;24)\approx 0{,}00000$

e) $B(n;\,0{,}1;\,n-1)=\binom{n}{n-1}\cdot 0{,}1^{n-1}\cdot(1-0{,}1)^{n-(n-1)}=\binom{n}{1}\cdot 0{,}1^{n-1}\cdot 0{,}9^{1}=B(n;0{,}9;1)$

EBA 31

X ist binomialverteilt, $n=11$, $p=0{,}7 \Rightarrow$ (a) $E(X)=n\cdot p=\underline{7{,}7}$

(b) $Var(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$, $\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\underline{\frac{\sqrt{231}}{10}}\approx 1{,}52$

EBA 32

a) $F_{0,3}^{10}(4)\approx 84{,}97\%$ b) $F_{0,1}^{9}(0)=B(9;0{,}1;0)=0{,}9^9\approx 38{,}74\%$

c) $F_{0,27}^{97}(100)=1$ (weil $100\geq 97$) d) $\sum_{k=0}^{4}B(5;\frac{3}{4};k)=F_{3/4}^{5}(4)\approx 76{,}27\%$

e) $\sum_{k=1}^{6}B(8;\frac{1}{2};k)=F_{0,5}^{8}(6)-B(8;\frac{1}{2};0)\approx 96{,}09\%$

f) $P(B_{15;0,2}>3)=1-F_{0,2}^{15}(3)\approx 35{,}18\%$

EBA 33

$X:=$ „Zahl fehlerhafter Schrauben in 200er-Packung“ $\Rightarrow X$ ist $B_{n,p}$-verteilt mit $n=200$ und $p=\frac{1}{100}$ $\Rightarrow P(X>3)=\underline{1-F_{0,01}^{200}(2)}\approx 32{,}33\%$

EBA 34

a) $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \overrightarrow{OX} + \mu \cdot \overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -k \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -k-1 \\ 2k \end{pmatrix}$

EBA 35

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 1 \Rightarrow (7|2|2)$ liegt auf g

b) $\begin{pmatrix} -13 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\lambda = -3 \wedge \lambda = -2{,}5)$ ↯

$(-13|-5|-2)$ liegt nicht auf g

c) $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-2 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\lambda = \frac{a-2}{2} \wedge \lambda = 0{,}5 \wedge \lambda = a-1)$

$\Leftrightarrow \lambda = 0{,}5 = \frac{a}{2} - 1 = a - 1$ ↯ $\Rightarrow (a|1|a)$ liegt für kein $a \in \mathbb{R}$ auf g

EBA 36

a) Verschiedene Geraden, da Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

b) Verschiedene Geraden, da Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

c) $-1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow$ parallel

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\lambda = 1 \wedge \lambda = -\frac{1}{3})$ ↯ $\Rightarrow$ echt parallele Geraden

d) $3{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 21 \end{pmatrix} \Rightarrow$ parallel

$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 2{,}5$ ✓ $\Rightarrow$ identische Gerade

EBA 37

a) Nein: $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -13 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Nein: $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) Ja: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat offenbar keine Lösung

d) Nein: $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix} = -2{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

EBA 38

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ 2 - 2 \\ 3 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ -2 - 2 \\ 3 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC}$ hat keine Lösung

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist wirklich eine Ebene

EBA 39

a) $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}=3+0+4=7\neq 0 \Rightarrow P\notin E$

b) Lösungen von $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\circ\vec{v}=0$ sind u.a. $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow (2|-4|1), (1|-1|0)\in E$

(und natürlich $(-1|-1|1)\in E$)

EBA 40

Aufpunkt $A(2|2|2)$, $-\vec{AB}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$, $-\vec{AC}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, $(-\vec{AB})\times(-\vec{AC})=\begin{pmatrix}2\cdot 0-2\cdot 2\\2\cdot 2-0\cdot 0\\0\cdot 2-2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\-4\end{pmatrix}=:\vec{n}$

a) $\begin{pmatrix}-4\\4\\-4\end{pmatrix}\circ\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right]=0$

b) $|\vec{n}|=4\sqrt{3}$, weil $\vec{0A}\circ\vec{n}=-8<0$ besser Einheitsvektor $\frac{-1}{4\sqrt{3}}\cdot\vec{n}=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Hessesche Normalenform $\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\circ\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right]$

EBA 41

a) Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ sind sogar Gegenvektoren $\Rightarrow$ parallel

$\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ hat keine Lösung $\Rightarrow$ echt parallel

b) Linear unabhängige Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\mu\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$

windschief

$\Leftrightarrow 1+2\lambda=-3\mu \wedge -3-\lambda=\mu\cdot 2\wedge 1+3\lambda=\mu$

$\Leftrightarrow 1+2\lambda=-3-9\lambda \wedge -3-\lambda=2+6\lambda\wedge 1+3\lambda=\mu \Leftrightarrow \lambda=-\frac{4}{11}\wedge\lambda=-\frac{5}{7}$ ↯

c) Linear unabhängige Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}9\\0\\-5\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}6\\1\\-3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}-\mu\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\lambda=1\wedge\mu=2$ ✓ $\Rightarrow$ 1 Schnittpunkt

d) Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ sind Vielfache

$\begin{pmatrix}5+n\\n-2\\n+1\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow n=0\wedge\lambda=1$

$\Rightarrow$ identisch für $n=0$, sonst echt parallel

EBA 42

a) $\begin{pmatrix}4\\1\\-4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow$ Gerade in Ebene oder parallel

$\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}=-9\neq 0 \Rightarrow$ parallel, kein gemeinsamer Punkt

b) $\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\-8\\2\end{pmatrix} = -42 \neq 0 \Rightarrow$ Genau ein Schnittpunkt

$\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}5\\-5\\-2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}4\\-8\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}6\\-7\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\-8\\2\end{pmatrix} = -42 - 42\mu \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \mu = -1 \Rightarrow$ Schnittpunkt: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\-5\\-2\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}4\\-8\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Nur gemeinsamer Punkt $(1|3|-4)$

c) $\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} = -6+8-2 = 0$, $\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}0\\2\\-6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = 0$ ✓

$\Rightarrow$ Gerade liegt in Ebene, alle Geradenpunkte sind gemeinsame Punkte

EBA 43

a) Normalenvektoren sind linear abhängig

$\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}5\\2\\-2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ identische Ebenen

$\Rightarrow$ alle Punkte von E sind gemeinsame Punkte

b) Normalenvektoren sind linear abhängig, $\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\-6\\5\end{pmatrix} = -35$

$\Rightarrow$ echt parallele Ebenen, keine gemeinsamen Punkte

c) Normalenvektoren sind linear unabhängig, daher schneiden sich die Ebenen

Ebenen in Koordinatenform: (I) $-2x_1 + 4x_2 - x_3 = 14$, (II) $4x_1 - 2x_2 - x_3 = 4$

(I − II) $-6x_1 + 6x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{3} + x_1$, in (II) $x_3 = 2x_1 - \frac{22}{3}$

$\Rightarrow$ Schnittgerade $\vec{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\5\\-22\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

EBA 44

$\overrightarrow{PX} = \left[\begin{pmatrix}7\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-2\\+2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PX} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 4 + 2\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = -2$

$\Rightarrow \overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}6\\-2\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{PX}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = \underline{6}$

EBA 45

a) $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ normieren: $|\vec{n}| = 3 \Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{1}{3}\vec{n}$

$\left|\vec{n}_0 \circ \left[\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\right]\right| = \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3} \cdot |-8+2| = \underline{2}$

b) Ebenen E und F sind parallel, weil Normalenvektoren sogar Gegenvektoren

$\left|\vec{n}_0 \circ \left[\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\right]\right| = \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}|-4-2-4| = \underline{4}$ (mit $\vec{n}_0$ aus (a))

EBA 46

a) g und a schneiden sich: Schnittpunkt $(12|0|-4)$ für $\lambda=1$ bzw. $\mu=0$

$$\Rightarrow \text{Schnittwinkel } \cos^{-1}\left(\left|\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right| : \left|\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}\right| : \left|\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right|\right) = \cos^{-1}\left(10 : \sqrt{81} : \sqrt{9}\right) =$$

$$= \underline{\cos^{-1}\left(\tfrac{10}{27}\right)} \approx 68{,}26^\circ$$

b) Kein Schnittwinkel, da sich g und b nicht schneiden:

$$\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}6\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda = 1$, also $6 = 4r$ und $-5 = 5r$ ↯

EBA 47

a) Wegen $\begin{pmatrix}-6\\3\\6\end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\begin{pmatrix}8\\-4\\-8\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-6\\3\\6\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\5\\-4\end{pmatrix}\right] = 39 \neq 0$ sind E und A echt parallel, also <u>kein</u> Schnittwinkel

b) $\cos^{-1}\left(\left|\begin{pmatrix}-6\\3\\6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\-7\\-4\end{pmatrix}\right| : \left|\begin{pmatrix}-6\\3\\6\end{pmatrix}\right| : \left|\begin{pmatrix}4\\-7\\-4\end{pmatrix}\right|\right) = \cos^{-1}\left(|-69| : \sqrt{81} : \sqrt{81}\right) = \underline{\cos^{-1}\frac{69}{81}} \approx 31{,}59^\circ$

EBA 48

g hat Richtungsvektor $\vec{r} := \begin{pmatrix}6+3\sqrt{3}\\4\\3+6\sqrt{3}\end{pmatrix}$ mit

$$|\vec{r}| = \sqrt{(36+36\sqrt{3}+27)+16+(9+36\sqrt{3}+108)} = \sqrt{196+72\sqrt{3}}$$

$\vec{r}\circ\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix} > 0$, also schneidet g E; mit $\vec{n} := \begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ gilt:

$$|\vec{n}| = 7,\quad |\vec{r}\circ\vec{n}| = |18+9\sqrt{3}+8+18+36\sqrt{3}| = 44+45\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{Schnittwinkel } 90^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{r}\circ\vec{n}|}{|\vec{r}|\cdot|\vec{n}|}\right) = 90^\circ - \cos^{-1}\frac{44+45\sqrt{3}}{7\sqrt{196+72\sqrt{3}}} \approx 76{,}59^\circ$$