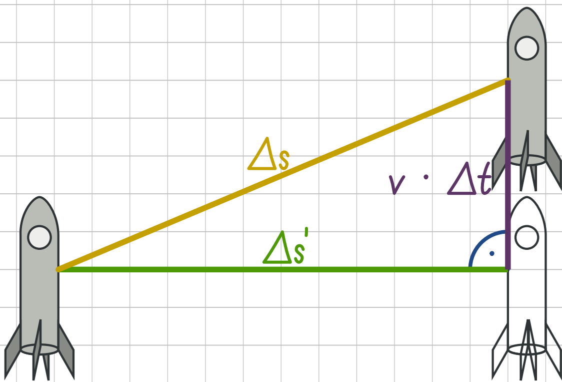
Lorentzfaktor – Herleitung der Formel

$\gamma = \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta s'}$ (siehe Hausaufgabe)

Beide relevante Längen lassen sich im Inertialsystem S messen:



Zusammen mit der Strecke, die die rechte Rakete innerhalb der Lichtlaufzeit zurücklegt, bilden Δs und $\Delta s'$ ein rechtwinkliges Dreieck. Satz des Pythagoras dafür:

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 + (v \cdot \Delta t)^2 \quad | - (v \cdot \Delta t)^2$$

$$\Delta s^2 - (v \cdot \Delta t)^2 = \Delta s'^2$$

Weil $\Delta s = c \cdot \Delta t$ ist:

$$\Delta s'^2 = (c \cdot \Delta t)^2 - (v \cdot \Delta t)^2 = c^2 \cdot \Delta t^2 - v^2 \cdot \Delta t^2 =$$

$$= (c^2 - v^2) \cdot \Delta t^2 \quad | \sqrt{\dots}$$

$$\Delta s' = \sqrt{c^2 - v^2} \cdot \Delta t$$

Beides eingesetzt in $\gamma = \frac{\Delta s}{\Delta s'}$, dann gekürzt:

$$\gamma = \frac{\Delta s}{\Delta s'} = \frac{c \cdot \Delta t}{\sqrt{c^2 - v^2} \cdot \Delta t} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Teilweises Radizieren:

$$\sqrt{c^2 - v^2} = \sqrt{c^2 \cdot 1 - c^2 \cdot \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{c^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c \cdot \sqrt{1 - v^2 : c^2}$$

Jetzt c kürzen:

$$\boxed{\gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{c}{c \cdot \sqrt{1 - v^2 : c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 : c^2}}}$$